
Notes didàctiques

Sobre el càlcul de límits i d'expressions radicals

JOAN GÓMEZ I URGELLÉS
Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica
EUP Vilanova i la Geltrú - UPC

A la nota del company Jordi Gas apareguda a **SCM/Notícies/2** es feien unes observacions sobre el càlcul de certs límits.

Heus ací un altre exemple en què cal posar molta cura en el tractament del signe de l'infinit. En alguns llocs es dona per vàlid el càlcul següent: $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0}} = e^{\infty} = \infty$.

Per corregir l'errada i fer el càlcul correctament, cal pensar en el signe de l'infinit:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{3}{x-2}} = e^{\frac{3}{0^-}} = e^{-\infty} = 0.$$

En la mateixa línia, trobem moltes explicacions (fins i tot en algun llibre de text!) en què manca rigor per fer bon ús de les hipòtesis que calen per aplicar certs resultats matemàtics, en aquest cas la igualtat $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Si l'apliquem reiteradament s'obté: $-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$. Aquesta igualtat pot fer entrar en contradicció més d'un estudiant de secundària si no li expliquem ben bé on és l'error: quina és la definició o fórmula que hem aplicat incorrectament?

Problemes

Agraïm al Sr. Miguel Amengual Covas per haver-nos informat que es poden trobar solucions dels problemes A1, A2 i de l'enunciat refinat de A3 (vegeu **SCM/Notícies/2**, Solucions als problemes A1-A5) en la traducció anglesa de la tercera edició russa del llibre *The USSR Olympiad Problem Book* (Dover Publications, Nova York), pàgines 142, 282-283 i 144-146, respectivament. Ensem s'aprofitem l'ocasió per dir que l'apartat de **Problemes proposats** de **SCM/Notícies** conté problemes que per regla general provenen de reculls al nostre abast: és fins on podem arribar amb les forces que tenim fins ara. Això no vol dir, és clar, que no esperem que cada vegada ens enviareu més problemes inèdits que ens permetin elevar el vigor de la secció de **Problemes**. Endemés, normalment no ens preocuparem, per als problemes proposats no inèdits, de citar les fonts d'on s'han extret, i només a l'apartat de solucions donarem la informació al nostre abast que considerem rellevant i pertinent.

Problemes proposats

A13. Determineu tots els enters $x, y \neq 0$ tals que

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3.$$

A14. Els segments AD , BE i CF són les bisectrius interiors d'un triangle ABC amb D , E i F sobre els costats del triangle. Determineu els possibles valors de l'angle $\angle BAC$ si l'angle $\angle EDF$ és de 90° .

A15. Sigui f una funció de \mathbb{N} a \mathbb{N} tal que

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 3$$

$$f(2n) = f(n)$$

$$f(4n + 1) = 2f(n + 1) - f(n)$$

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n).$$

Determineu els nombre de nombres naturals entre 1 i 2000 fixos per aquesta funció.